

# CÁLCULO L1 — NOTAS DA QUARTA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESUMO. Nesta aula, apresentaremos as regras para derivar o produto e o quociente de funções, complementando as regras para as operações básicas. O conceito de reta normal a uma curva também será abordado.

## 1. INTRODUÇÃO

Considere a seguinte questão:

**Pergunta 1.** *Para*

$$r(X) = (X^5 - 4X^3 + 2X + 9)(5X^7 - 13X^6 + 16X^5 - X^3 + 4X - 5)$$

*qual o valor de  $r'(1)$ ?*

Podemos resolver esta questão sem utilizar a regra da derivada para o produto de funções. Isto ocorre porque  $r$  é o produto de dois polinômios e o conjunto de polinômios com coeficientes reais é fechado com relação as operações de adição, subtração e multiplicação. Podemos reescrever  $r$  da seguinte forma

$$r(X) = 5X^{12} - 13X^{11} - 4X^{10} + 52X^9 - 55X^8 + 19X^7 - 77X^6 + \\ 139X^5 - 18X^4 + 11X^3 + 8X^2 + 26X - 45$$

Uau! Será que cometemos um erro ao fazer a multiplicação destes polinômios? Vamos assumir que não. Portanto,

$$r'(X) = 60X^{11} - 143X^{10} - 40X^9 + 468X^8 - 440X^7 + 133X^6 - 462X^5 + \\ 695X^4 - 72X^3 + 33X^2 + 16X + 26$$

Como o valor de um polinômio em 1 é a soma de seus coeficientes, temos que

$$r'(1) = 60 - 143 - 40 + 468 - 440 + 133 - 462 + 695 - 72 + 33 + 16 + 26 = 274$$

Na próxima seção, veremos que a regra do produto nos permite chegar a este valor de maneira mais eficiente. Existem casos em que não é possível calcular a derivada da função, obtida pela multiplicação de duas outras, sem utilizar a regra do produto ou alguma técnica mais sofisticada, como, por exemplo, a expansão numa soma infinita de potências positivas de  $X$ . Isto ocorre com a função  $s(X) = X \operatorname{sen} X$ .

## 2. A REGRA DO PRODUTO

A derivada do produto não é o produto das derivadas, como podemos observar na próxima regra.

**Regra 2.** *Se  $r(X) = f(X)g(X)$ , então*

$$r'(X) = f'(X)g(X) + f(X)g'(X)$$

---

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Por definição,

$$(1) \quad r'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(X+h) - r(X)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X+h)g(X+h) - f(X)g(X)}{h}$$

Ao adicionarmos e subtrairmos  $f(X)g(X+h)$  no numerador, obtemos

$$(2) \quad \begin{aligned} r'(X) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X+h)g(X+h) - f(X)g(X+h) + f(X)g(X+h) - f(X)g(X)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X+h) + f(X)[g(X+h) - g(X)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X+h)}{h} + \frac{f(X)[g(X+h) - g(X)]}{h} \end{aligned}$$

Este argumento já foi utilizado na demonstração da regra de que o limite do produto é o produto dos limites. Na passagem de (1) para (2) utilizamos a seguinte igualdade

$$f(X+h)g(X+h) - f(X)g(X) = [f(X+h) - f(X)]g(X+h) + f(X)[g(X+h) - g(X)]$$

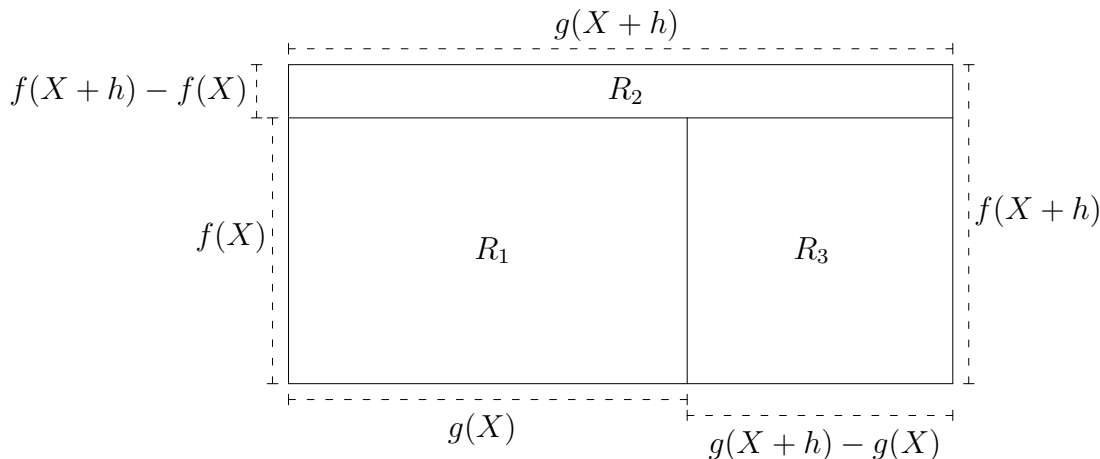
que pode ser reescrita como

$$f(X+h)g(X+h) = f(X)g(X) + [f(X+h) - f(X)]g(X+h) + f(X)[g(X+h) - g(X)]$$

A maneira de verificar esta igualdade é a algébrica, como fizemos. Porém, podemos estabelecer geometricamente esta igualdade, no caso em que  $0 < f(X) < f(X+h)$  e  $0 < g(X) < g(X+h)$  da seguinte forma: a área de um retângulo de lados  $f(X+h)$  e  $g(X+h)$  decompõe-se como a soma das áreas de:

- um retângulo  $R_1$  de lados  $f(X)$  e  $g(X)$ ; mais
- um retângulo  $R_2$  de lados  $f(X+h) - f(X)$  e  $g(X+h)$ ; mais
- um retângulo  $R_3$  de lados  $f(X)$  e  $g(X+h) - g(X)$

Veja a próxima ilustração.



Como o limite da soma é a soma dos limites, obtemos a partir de (2),

$$r'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X)[g(X+h) - g(X)]}{h}$$

Mas o limite do produto é o produto dos limites e daí

$$r'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(X+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(X) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(X+h) - g(X)}{h}$$

Obtemos esta regra pois

$$\begin{aligned} f'(X) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} \\ g(X) &= \lim_{h \rightarrow 0} g(X+h) \\ f(X) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(X) \\ g'(X) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(X+h) - g(X)}{h} \end{aligned}$$

A segunda igualdade acima ocorre porque, como  $g'(X)$  existe, o limite da quarta igualdade é “do tipo  $\frac{0}{0}$ ” e daí  $g(X+h) - g(X) \rightarrow 0$ , ou seja  $g(X+h) \rightarrow g(X)$ , quando  $h \rightarrow 0$ .

Vamos responder a Pergunta 1 utilizando a Regra 2. Primeiro temos de calcular  $r'(X)$ , para

$$r(X) = (X^5 - 4X^3 + 2X + 9)(5X^7 - 13X^6 + 16X^5 - X^3 + 4X - 5)$$

e depois encontrar  $r'(1)$ . Caso

$$f(X) = X^5 - 4X^3 + 2X + 9 \quad \text{e} \quad g(X) = 5X^7 - 13X^6 + 16X^5 - X^3 + 4X - 5$$

temos que  $r(X) = f(X)g(X)$ . Sabemos que  $r'(X) = f'(X)g(X) + f(X)g'(X)$ , pela Regra 2, e daí

$$\begin{aligned} r'(X) &= (5X^4 - 12X^2 + 2)(5X^7 - 13X^6 + 16X^5 - X^3 + 4X - 5) \\ &\quad + (X^5 - 4X^3 + 2X + 9)(35X^6 - 78X^5 + 80X^4 - 3X^2 + 4) \end{aligned}$$

Conseqüentemente

$$r'(1) = (5 - 12 + 2)(5 - 13 + 16 - 1 + 4 - 5) + (1 - 4 + 2 + 9)(35 - 78 + 80 - 3 + 4) = 274$$

A seguir apresentamos uma variante da Regra 2 para o cálculo da derivada do produto de três funções.

**Regra 3.** Se  $r(X) = a(X)b(X)c(X)$ , então

$$r'(X) = a'(X)b(X)c(X) + a(X)b'(X)c(X) + a(X)b(X)c'(X)$$

Tome  $g(X) = b(X)c(X)$ . Logo  $r(X) = a(X)g(X)$ . A seguir aplicaremos a Regra 2 para encontrar a derivada de  $r(X)$ , quando escrita como o produto de duas funções, e de  $g(X)$ ,

$$\begin{aligned} r'(X) &= a'(X)g(X) + a(X)g'(X) \\ &= a'(X)[b(X)c(X)] + a(X)[b'(X)c(X) + b(X)c'(X)] \\ &= a'(X)b(X)c(X) + a(X)b'(X)c(X) + a(X)b(X)c'(X) \end{aligned}$$

e a Regra 3 segue.

**Exercício 4.** Determine uma expressão para a derivada de  $r(X) = a(X)b(X)c(X)d(X)$

**Exercício 5.** Calcule a derivada das seguintes funções:

- (i)  $a(X) = (2X^3 - 5X^2 + 4X - 7)(3X^3 + 4X^2 + 3X - 3)$
- (ii)  $b(X) = (5\sqrt{X} - 9)(3X\sqrt{X} + X - 2)$
- (iii)  $c(X) = (X^2 + 10)(X^3 + 20)(3X^5 + 40)$
- (iv)  $d(X) = (8\sqrt{X} - 3)^6$

**Exercício 6.** Encontre uma expressão para  $r'(X)$  quando  $r(X) = f(X)^n$ , na qual  $n$  representa um natural.

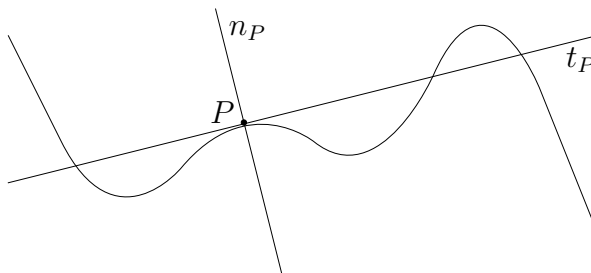
A **multiplicidade** de uma raiz  $a$  de um polinômio não-nulo  $p(X)$  é o maior natural  $m$  tal que  $(X - a)^m$  divide  $p(X)$ .

**Exercício 7.** Seja  $a$  uma raiz de multiplicidade  $m$  de um polinômio não-nulo  $p(X)$ . Quais condições devem ser satisfeitas para  $a$  ser raiz de  $p'(X)$ ? Quando isto ocorre, qual a multiplicidade de  $a$  como raiz de  $p'(X)$ ? (**Sugestão:** Decomponha  $p(X)$  como o produto de  $(X - a)^m$  por  $q(X)$ , para um polinômio  $q(X)$  que não tem  $a$  como raiz, e utilize a regra do produto e o exercício anterior.)

**Exercício 8.** Utilizando as respostas obtidas no exercício anterior, determine as raízes do polinômio  $p(X) = 5X^{12} - 12X^{10} + 64$  que têm multiplicidade 2.

### 3. A RETA NORMAL

A **reta normal** a uma curva no ponto  $P$  é a reta que é perpendicular a reta tangente a esta curva no ponto  $P$ . Denotamos a reta tangente e a reta normal no ponto  $P$  respectivamente por  $t_P$  e  $n_P$ , como ilustrado a seguir.



Vamos assumir que o ponto  $P$  tem coordenadas  $(x_0, y_0)$ . Pode ocorrer de  $t_P$  ou  $n_P$  ser vertical. Temos duas possibilidades:

- Quando  $n_P$  é vertical, sua equação é  $X = x_0$ , e  $t_P$  é horizontal com equação  $Y = y_0$
- Quando  $t_P$  é vertical, sua equação é  $X = x_0$ , e  $n_P$  é horizontal com equação  $Y = y_0$

Estes casos são triviais. Na discussão que se segue, vamos assumir que  $t_P$  e  $n_P$  não são verticais. Em particular,  $t_P$  e  $n_P$  possuem coeficientes angulares. O coeficiente angular de  $t_P$  pode ser encontrado através da derivação. Portanto, necessitamos descobrir uma maneira de encontrar o coeficiente angular de  $n_P$  a partir do de  $t_P$ . Caso logremos êxito, temos como determinar a equação de  $n_P$ , pois já conhecemos as coordenadas de um ponto pelo qual esta reta passa, que é  $P$ . Passamos a responder a seguinte pergunta:

**Pergunta 9.** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  retas que possuem coeficientes angulares  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente. Que relação  $m_1$  e  $m_2$  satisfazem quando  $r_1$  e  $r_2$  são perpendiculares?

Sejam  $s_1$  e  $s_2$  retas passando pela origem  $O$  e paralelas a respectivamente  $r_1$  e  $r_2$ . Logo o par de retas  $r_1$  e  $s_1$  possuem os mesmos coeficientes angulares. O mesmo ocorre com o par  $r_2$  e  $s_2$ . Isto é, os coeficientes angulares de  $s_1$  e  $s_2$  são respectivamente  $m_1$  e  $m_2$ . Como  $s_1$  e  $s_2$  são perpendiculares, o coeficiente angular de uma destas retas é positivo e o da outra é negativo — é possível fazer uma rotação destas retas de forma que uma coincida com o eixo das abscissas e a outra com o eixo das ordenadas. Vamos assumir que o coeficiente angular de  $s_1$  é negativo. Isto é,

$$m_1 < 0 \text{ e } m_2 > 0$$

Sejam  $A, B$  e  $C$  os pontos de interseção da reta de equação  $X = 1$  com respectivamente  $s_2$ , o eixo das abscissas e  $s_1$ . Note que  $OAC$  é um triângulo retângulo com hipotenusa  $AC$ . Mais ainda,  $OB$  é a altura com relação a hipotenusa. Da geometria do ensino fundamental, sabemos que

$$(3) \quad \overline{OB}^2 = \overline{AB} \overline{BC}$$

Como  $s_1$  e  $s_2$  passam pela origem, suas equações são respectivamente  $Y = m_1X$  e  $Y = m_2X$ . As coordenadas de  $A$  e  $C$  são respectivamente  $(1, m_2)$  e  $(1, m_1)$ . Portanto,

$$\overline{AB} = m_2 \quad \text{e} \quad \overline{BC} = -m_1$$

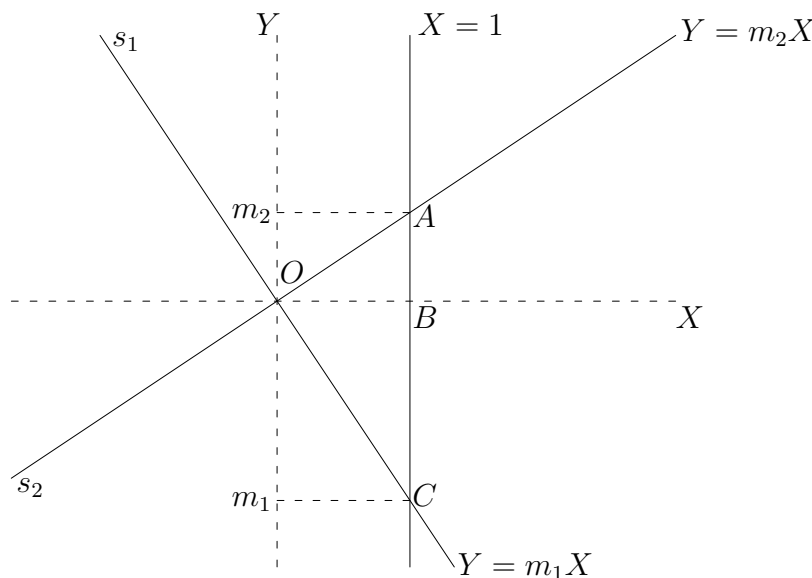
Substituindo estes valores em (3), temos que

$$1 = -m_1m_2$$

pois  $\overline{OB} = 1$ . Podemos reescrever esta relação como:

$$(4) \quad m_1m_2 = -1 \quad \text{ou} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Veja a ilustração a seguir.



Em resumo, (4) explicita a relação entre os coeficientes angulares de duas retas perpendiculares quando nenhuma delas é vertical.

**Erro freqüente 10.** *Em geral, os estudantes têm dificuldade em encontrar a equação de uma reta normal a uma curva quando a reta tangente é horizontal. Tentam utilizar a relação (4), que não se aplica neste caso excepcional, pois a reta normal será vertical e não possui coeficiente angular. Portanto, sua equação é da forma  $X = x_0$ , na qual  $x_0$  representa a abscissa do ponto da curva pelo qual a reta normal passa.*

**Exemplo 11.** *Encontre a reta normal à curva de equação  $Y = (X^2 + 1)(2X^3 - 1)$  no ponto de coordenadas  $(-1, -6)$*

Primeiro iremos encontrar o coeficiente angular  $m$  da reta tangente no ponto de coordenadas  $(-1, -6)$ . Como esta curva é o gráfico da função  $f(X) = (X^2 + 1)(2X^3 - 1)$ , temos que  $m = f'(-1)$ . Pela regra do produto,

$$f'(X) = 2X(2X^3 - 1) + (X^2 + 1)6X^2$$

Logo  $m = f'(-1) = 18$ . Se  $m_{\perp}$  denota o coeficiente angular da reta normal a esta curva no ponto de coordenadas  $(-1, -6)$ , então, por (4),

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{18}$$

A equação da reta normal é

$$Y - y_0 = m_{\perp}(X - x_0)$$

na qual  $m_{\perp} = -\frac{1}{18}$  e  $(x_0, y_0) = (-1, -6)$ . Portanto, sua equação é

$$Y + 6 = -\frac{X + 1}{18}$$

que pode ser reescrita como

$$X + 18Y + 109 = 0$$

**Exercício 12.** *Repita o exercício anterior substituindo o ponto:*

- (i) pelo de coordenadas  $(1, 2)$
- (ii) e depois pelo de coordenadas  $(0, -1)$

#### 4. REGRA DO QUOCIENTE

A próxima regra será estabelecida de maneira similar à do produto. Por este motivo seremos mais sucintos.

**Regra 13.** *Se  $r(X) = \frac{f(X)}{g(X)}$ , então*

$$r'(X) = \frac{f'(X)g(X) - f(X)g'(X)}{g(X)^2}$$

Por definição,

$$r'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(X+h) - r(X)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(X+h)}{g(X+h)} - \frac{f(X)}{g(X)}}{h}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração à direita por  $g(X+h)g(X)$  obtemos

$$r'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{f(X+h)}{g(X+h)} - \frac{f(X)}{g(X)} \right] g(X+h)g(X)}{hg(X+h)g(X)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X+h)g(X) - f(X)g(X+h)}{hg(X+h)g(X)}$$

Ao adicionarmos e subtrairmos  $f(X)g(X)$  no numerador, obtemos

$$\begin{aligned} r'(X) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X+h)g(X) - f(X)g(X) + f(X)g(X) - f(X)g(X+h)}{hg(X+h)g(X)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X) - f(X)[g(X+h) - g(X)]}{hg(X+h)g(X)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X)}{h} - \frac{f(X)[g(X+h) - g(X)]}{h} \right\} \frac{1}{g(X+h)g(X)} \end{aligned}$$

Como o limite do produto é o produto dos limites, temos que

$$r'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X)}{h} - \frac{f(X)[g(X+h) - g(X)]}{h} \right\} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(X+h)g(X)}$$

Como o limite do quociente é o quociente dos limites, quando o denominador não tende a 0, chegamos à

$$r'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X)}{h} - \frac{f(X)[g(X+h) - g(X)]}{h} \right\} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} 1}{\lim_{h \rightarrow 0} g(X+h)g(X)}$$

Note que  $\lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$  e que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(X+h)g(X) = \lim_{h \rightarrow 0} g(X+h) \lim_{h \rightarrow 0} g(X) = g(X)^2$$

porque  $\lim_{h \rightarrow 0} g(X+h) = g(X)$ , pois  $g'(X)$  existe. Conseqüentemente

$$r'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X)}{h} - \frac{f(X)[g(X+h) - g(X)]}{h} \right\} \frac{1}{g(X)^2}$$

Mas o limite da diferença é a diferença dos limites e portanto,

$$r'(X) = \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(X+h) - f(X)]g(X)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X)[g(X+h) - g(X)]}{h} \right\} \frac{1}{g(X)^2}$$

Finalmente, o limite do produto é o produto dos limites e daí

$$r'(X) = \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(X) - \lim_{h \rightarrow 0} f(X) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(X+h) - g(X)}{h} \right] \frac{1}{g(X)^2}$$

A regra do quociente fica estabelecida porque

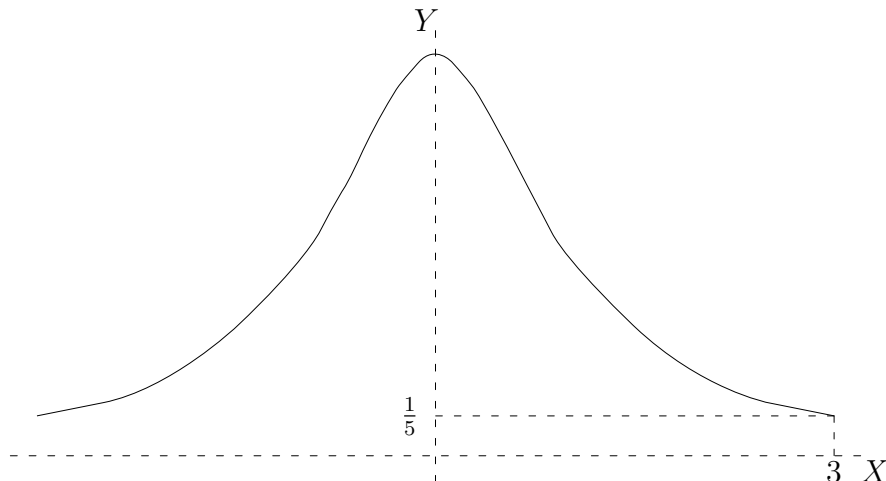
$$r'(X) = [f'(X)g(X) - f(X)g'(X)] \frac{1}{g(X)^2}$$

**Exemplo 14.** *Determine as equações das retas normais à curva de equação*

$$Y = \frac{2}{X^2 + 1}$$

*que passam pela origem.*

Na próxima figura ilustramos esta curva. A escala no eixo das ordenadas é 1,5 vezes maior que a do eixo das abscissas. Para dar uma idéia, indicamos o ponto de coordenadas  $(3, \frac{1}{5})$  no gráfico.



Observe que esta curva é o gráfico da função

$$f(X) = \frac{2}{X^2 + 1}$$

Portanto, o coeficiente angular da reta tangente a esta curva no ponto de coordenadas  $(X, f(X))$  é

$$f'(X) = \frac{0(X^2 + 1) - 2(2X)}{(X^2 + 1)^2} = -\frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$

Se a reta tangente for horizontal, então a reta normal será vertical e não terá coeficiente angular. Isto ocorre quando  $f'(X) = 0$ . Um quociente é nulo apenas quando o numerador o for. Isto é,  $4X = 0$  ou  $X = 0$ . Apenas no ponto de coordenadas  $(0, 2)$ , a reta tangente a esta curva é horizontal. Neste caso a reta normal é vertical e tem equação

$$(5) \quad X = 0$$

Note que esta reta normal, que é o eixo das ordenadas, passa pela origem. Por (4), a equação da reta normal à esta curva no ponto de coordenadas  $(a, f(a))$ , quando  $a \neq 0$ , é

$$Y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(X - a)$$

Substituindo os valores de  $f(a) = \frac{2}{a^2+1}$  e  $f'(a) = -\frac{4a}{(a^2+1)^2}$  nesta equação, obtemos

$$(6) \quad Y - \frac{2}{a^2 + 1} = \frac{(a^2 + 1)^2}{4a}(X - a)$$

Temos de verificar quais destas retas normais passam pela origem. Isto é, quando  $(0, 0)$  satisfaz a equação (6). Substituindo estes valores na equação temos

$$0 - \frac{2}{a^2 + 1} = \frac{(a^2 + 1)^2}{4a}(0 - a)$$

Que pode ser reescrita como

$$\frac{2}{a^2 + 1} = \frac{(a^2 + 1)^2}{4}$$

Ou seja  $(a^2 + 1)^3 = 8$  e daí  $a^2 + 1 = 2$  ou seja  $a = \pm 1$ . Substituindo estes dois valores de  $a$  em (6) obtemos

$$Y - 1 = X - 1 \quad \text{e} \quad Y - 1 = -(X + 1)$$

Estas equações podem ser reescritas como

$$X - Y = 0 \quad \text{e} \quad X + Y = 0$$

**Exercício 15.** Para a curva de equação

$$Y = \frac{1 - X^2}{8 + X^2}$$

- (i) Determine a equação da reta normal que é vertical.
- (ii) Caracterize os pontos para os quais a reta tangente tem coeficiente angular positivo.
- (iii) Encontre a equação da reta tangente no ponto de coordenadas  $(1, 0)$ .



## 5. RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

4.  $r'(X) = a'(X)b(X)c(X)d(X) + a(X)b'(X)c(X)d(X) + a(X)b(X)c'(X)d(X) + a(X)b(X)c(X)d'(X)$   
 5. (i)  $a'(X) = (6X^2 - 10X + 4)(3X^3 + 4X^2 + 3X - 3) + (2X^3 - 5X^2 + 4X - 7)(9X^2 + 8X + 3)$  (ii)  $b'(X) = \frac{5}{2\sqrt{X}}(3X\sqrt{X} + X - 2) + (5\sqrt{X} - 9)\left(3\sqrt{X} + \frac{3X}{2\sqrt{X}} + 1\right)$  (iii)  $c'(X) = 2X(X^3 + 20)(3X^5 + 40) + (X^2 + 10)3X^2(3X^5 + 40) + (X^2 + 10)(X^3 + 20)15X^4$   
 (iv)  $d'(X) = 6(8\sqrt{X} - 3)^5 \frac{8}{2\sqrt{X}}$  6.  $r'(X) = nf(X)^{n-1}f'(X)$  7. primeira pergunta:  $m \geq 2$   
 segunda pergunta:  $m - 1$  8.  $\sqrt{2}$  e  $-\sqrt{2}$  12. (i)  $X + 14Y - 29 = 0$  (ii)  $X = 0$  15. (i)  $X = 0$  (ii) pontos na curva com abscissa negativa (iii)  $2X + 9Y - 2 = 0$

CONTEÚDO DA QUARTA AULA DA DISCIPLINA CÁLCULO L1, OFERECIDA PARA OS CURSOS DE LICENCIATURA EM FÍSICA, MATEMÁTICA E QUÍMICA E O BACHARELADO EM QUÍMICA INDUSTRIAL, NO SEGUNDO SEMESTRE DE 2008 NA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, TENDO COMO PROFESSOR MANOEL LEMOS